

LEZIONE # 13

La **misura della deformazione** costituisce un settore delle misure meccaniche tra i più sviluppati e diffusi nell'ingegneria industriale, anche come *misura primaria* per la determinazione sperimentale di molte altre grandezze fisiche (*tensione, forza, pressione ...*). Si tratta essenzialmente di *misurare l'allungamento o l'accorciamento* (positivo o negativo) di pezzi meccanici sulla loro superficie.

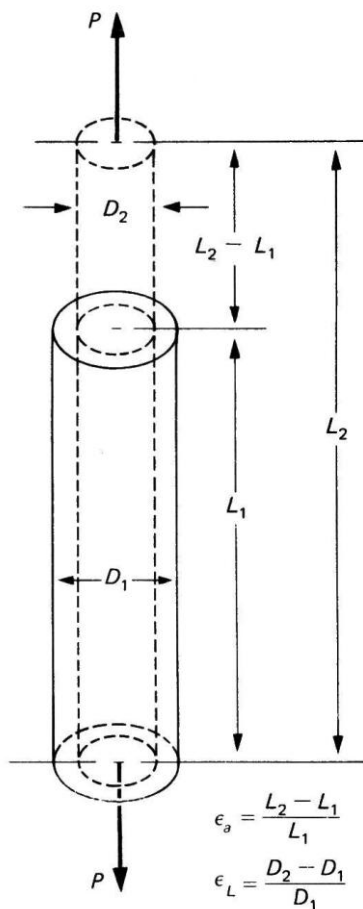


Figura 13.1

Per acciaio si considera spesso un valore di riferimento $\nu = 0.3$. Si tenga ben presente che si tratta di un valore nominale, solamente rappresentativo di una molteplicità di casi reali.

Se si conosce il **modulo di Young E** del materiale, nota la deformazione ϵ_a , è possibile ricavare il valore della **tensione** $\sigma = E \cdot \epsilon$. Nella figura 13.2 a lato sono riportati alcuni **moduli di elasticità E** per materiali metallici.

Ogni elemento meccanico tridimensionale che abbia una dimensione preponderante sulle rimanenti, ovvero per il quale sia possibile individuare un *asse principale*, come l'asta a sezione cilindrica nella figura 13.1 a lato, quando viene sottoposto ad un carico assiale P, manifesta un allungamento da L_1 a L_2 nella medesima dimensione assiale. La variazione $L_2 - L_1$ prende il nome di **allungamento o deformazione assoluta**, mentre l'allungamento relativo $(L_2 - L_1)/L_1$ viene definito **deformazione assiale** ϵ_a .

Come è noto, non potendo una forza P applicata assialmente produrre un'espansione del volume di un pezzo metallico, ad una deformazione di allungamento assiale ϵ_a si accompagna sempre una contrazione della sezione dell'asta. Il restringimento della sezione non è uniforme lungo l'asse ed è massimo in corrispondenza della mezzera dell'asta; esso può essere valutato computando la diminuzione del diametro (dimensione trasversale) dell'asta $D_2 - D_1$. Si definisce **deformazione trasversale** ϵ_t il restringimento relativo del diametro dell'asta $(D_2 - D_1)/D_1$.

Il rapporto tra la deformazione trasversale e quella assiale definisce il **coefficiente di Poisson** $\nu = \frac{\epsilon_t}{\epsilon_a}$. Essendo il segno di ϵ_a ed ϵ_t

sempre discorde, il coefficiente ν è sempre *negativo*.

Tale coefficiente ha un valore variabile, a seconda del materiale di cui è costituito il pezzo, e in genere va da $\nu = 0.2$ fino oltre $\nu = 0.4$.

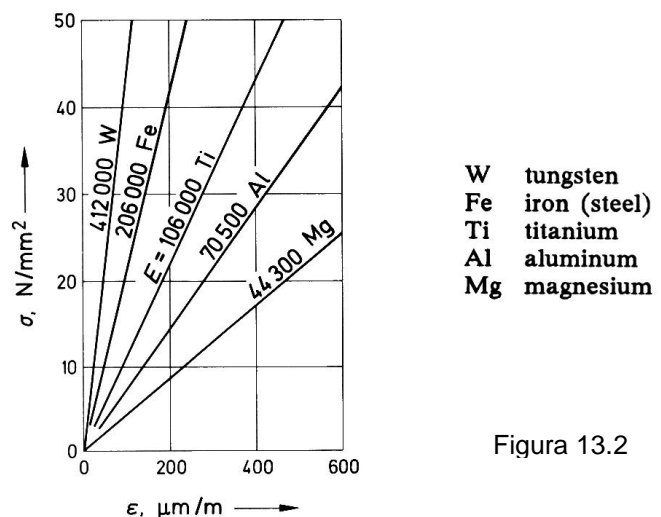
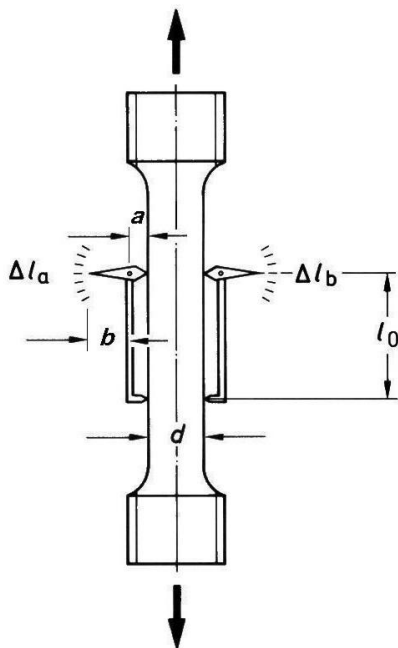


Figura 13.2



In genere è richiesta una misura “puntiforme” della deformazione, ovvero interessa la determinazione della deformazione su di una regione molto piccola del pezzo in esame. Questo perché una delle applicazioni fondamentali della misura di deformazione è l’individuazione delle zone dove si “concentrano” le tensioni sulla struttura in esame.

Ciò non di meno, vale la pena iniziare lo studio della misura della deformazione accennando agli strumenti che realizzano tale misura utilizzando direttamente la definizione $\varepsilon_a = \frac{\Delta L}{L}$. Questi strumenti vengono chiamati **estensometri meccanici**.



Lo strumento è applicato sul pezzo metallico mediante due coltelli alla distanza l_0 , uno fisso e l’altro mobile. Quando il pezzo viene sollecitato a trazione, come mostrato in figura 13.3, esso si allunga, provocando la rotazione degli indici.

Se i coltelli sono lunghi a e l’indice è lungo b , confondendo l’angolo con la sua tangente, è possibile scrivere per l’indicazione in uscita λ :

$$\Delta l = a \cdot \theta$$
$$\lambda = b \cdot \theta$$

a rapporto vale $\frac{\Delta l}{\lambda} = \frac{a}{b}$

quindi $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{a\lambda}{l_0 b}$

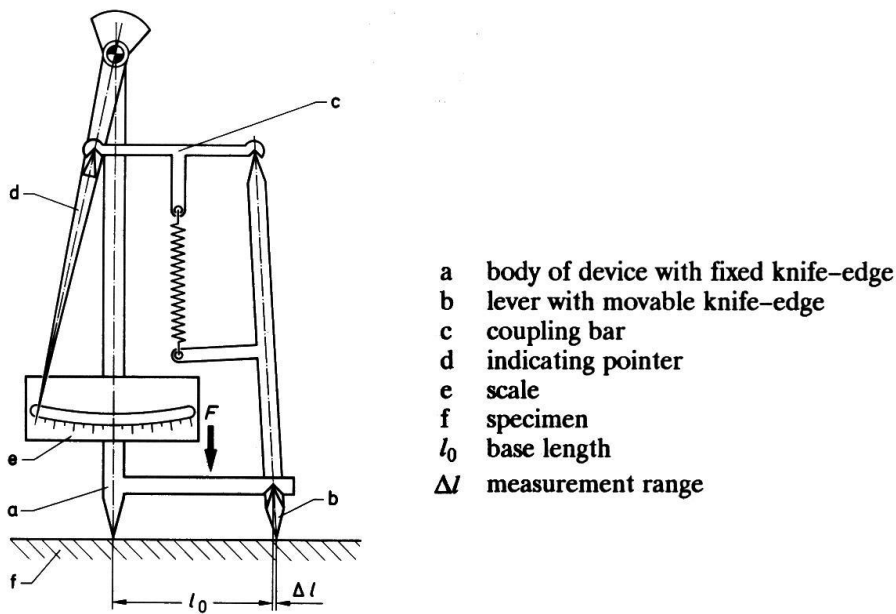
Schematic diagram for the determination of tensile strength

Figura 13.3

Si riconosce facilmente che non si tratta di una misura puntuale e la deformazione che si ottiene in uscita dal dispositivo è una *deformazione media* lungo il tratto l_0 . Se poi si tenta di realizzare strumenti con l_0 molto piccolo, la misura diviene impraticabile in quanto i coltelli incidono il pezzo e si ha difficoltà ad applicare e mantenere in loco lo strumento. A causa delle masse in gioco, eseguire misure dinamiche risulta quasi impossibile, anche quando l’indicatore meccanico viene sostituito da un raggio laser.

Gli estensometri sono comunque strumenti assai sensibili e tutt’oggi sono utilizzati nelle applicazioni dove non si richiede la determinazione delle deformazioni locali, oppure per la taratura degli altri trasduttori di deformazione.

Un esempio di estensometro a forte amplificazione meccanica è riportato sotto nella figura 13.4. Con tale strumento si riescono a raggiungere amplificazioni dell’ordine di 1000 volte il Δl_0 .



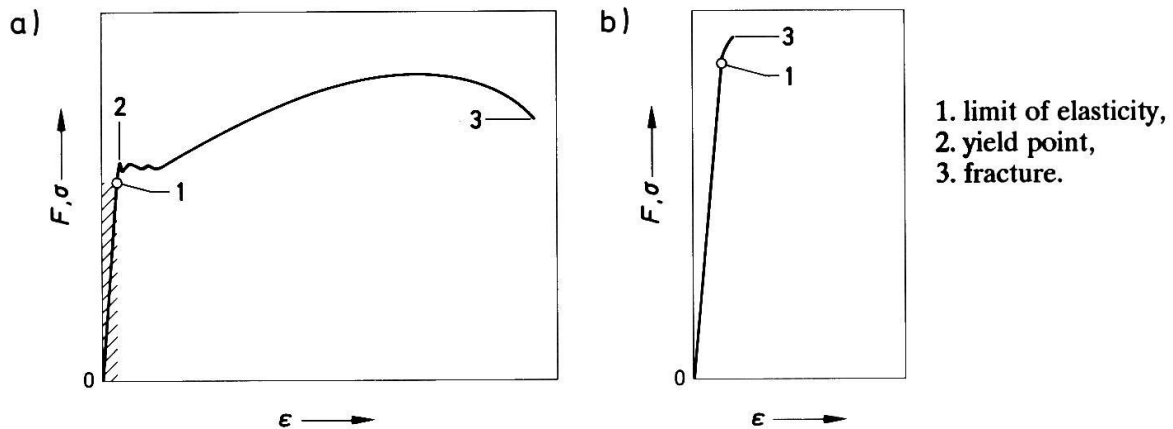
The Huggenberger tensometer with its double lever mechanism.

Gli estensometri sono anche utilizzati per la caratterizzazione statica di un materiale.

Attraverso l'applicazione di un carico ad un provino di sezione nota e la misura della deformazione media si ricostruiscono le curve sforzo-deformazione che definiscono bene se un materiale metallico è duttile oppure fragile.

Solamente a scopo di richiamo, si riportano sotto in figura 13.5 i diagrammi di Hook sperimentali per due materiali tipici: (a) duttile e (b) fragile.

Figura 13.4



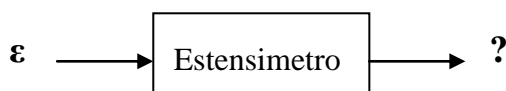
Examples of force/strain and stress/strain curves.

a) Characteristic of a ductile material with large yield range

b) Characteristic of a brittle material

Figura 13.5

Ma il trasduttore di gran lunga più utilizzato per la misura delle deformazioni in campo industriale e scientifico è *l'estensimetro elettrico a resistenza*.



ci si chiede, qual è la grandezza in uscita ?

Una prima rudimentale realizzazione di estensimetro elettrico a resistenza è riportata sotto nella figura 13.6. Si tratta semplicemente di un pezzetto di filo F con resistenza R , isolato elettricamente dal pezzo sottostante per mezzo di una basetta ma reso solidale ai propri estremi con il pezzo stesso.

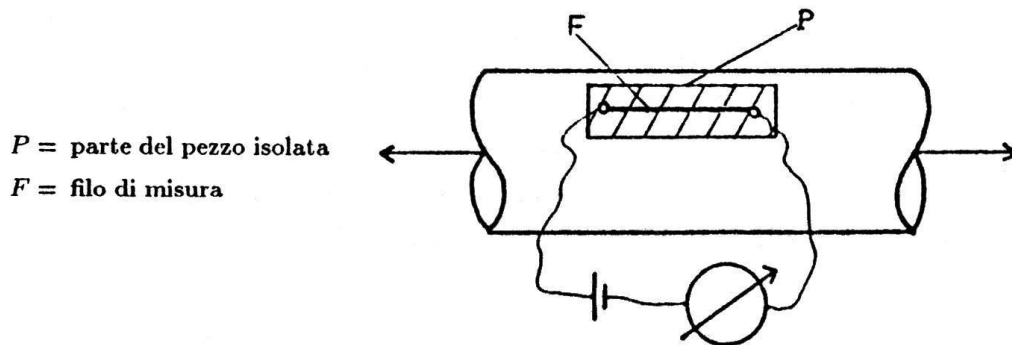


Figura 13.6

Per quanto schematico, tale dispositivo funziona sugli stessi principi fisici dei moderni estensimetri a *foglio fotoinciso*. La legge fisica di riferimento è la relazione che esprime la resistenza per mezzo della resistività specifica del materiale del filo e delle sue caratteristiche geometriche $R = \rho \frac{l}{S}$.

Quando il pezzo è sollecitato in trazione, variano la lunghezza l e la sezione S del filo, come se si trattasse di un provino cilindrico solidale al pezzo, anch'esso sollecitato in trazione. Varia anche la resistività ρ a causa della deformazione del reticolo cristallino; purtroppo tale variazione non può essere espressa in modo agevole con una relazione matematica. L'estensimetro a filo rappresenta "l'antenato" dei moderni trasduttori di deformazione. Dalle prime prove, emerse però subito che con un *singolo filo dritto*, per quanto sottile, non si riusciva a produrre variazioni di resistenza ΔR misurabili in modo affidabile ed accurato con uno strumento commerciale, anche quando le deformazioni del pezzo sottostante erano ingenti. Per questo trasduttore primordiale emergeva subito un *difetto di sensibilità*.

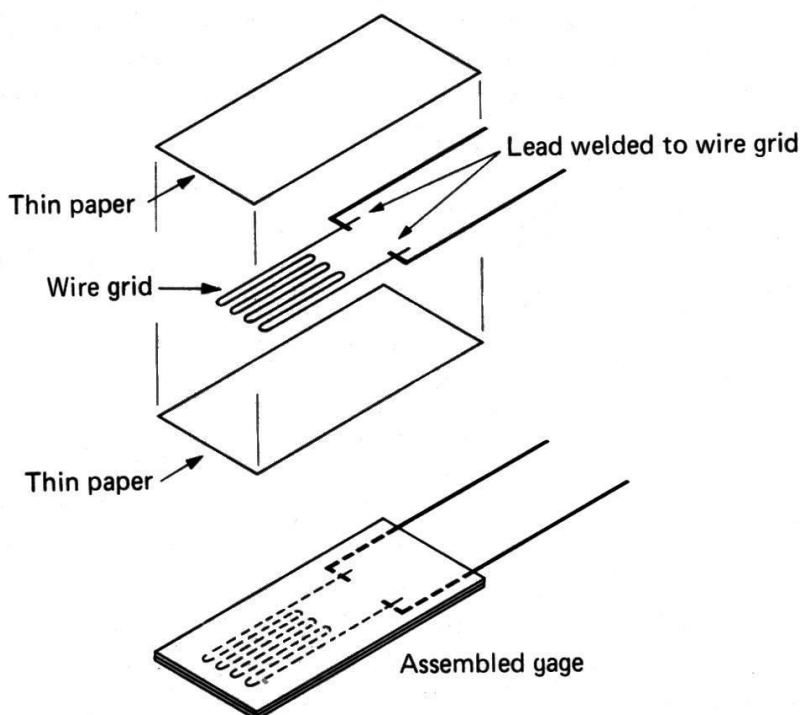


Figura 13.7

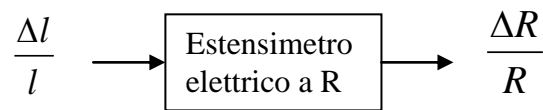
La resistenza di base R era troppo bassa. Per ovviare a tale problema venne proposto quasi subito di allungare il filo ma, per non estendere di nuovo troppo la lunghezza di base l_0 sulla quale misurare la deformazione, si scelse di ripiegare il filo a forma di serpentina e di includerlo tra due fogli di carta. Era nato **l'estensimetro a griglia** il cui schema è riportato di fianco nella figura 13.7.

Il filo può avere una sezione S di appena 1/100 di millimetro, questo permette di limitare la lunghezza l del filo in modo da realizzare una griglia con superficie totale di pochi mm^2 .



Gli accorgimenti appena esposti consentono di avere una griglia con resistenza di base che varia tra i 100÷1000 Ω. Un trasduttore così concepito fornisce, in funzione dei valori di deformazione che normalmente si osservano sui pezzi sollecitati, variazioni di resistenza ΔR in uscita apprezzabili con sicurezza. Date le dimensioni ridotte, gli estensimetri a griglia eseguono egregiamente *misure puntuali* della deformazione e sono anche in grado di effettuare *misure dinamiche* con frequenze di taglio fino a 100kHz.

Per ricavare la *curva di graduazione* del trasduttore *estensimetro elettrico a resistenza*, si effettua la derivata logaritmica della relazione fisica di base: $R = \rho \frac{l}{S}$



avendo una grandezza in ingresso espressa in *termini relativi*, ha senso esprimere in *termini relativi* anche la grandezza di uscita !

si ha: $\ln R = \ln \left(\rho \frac{l}{S} \right) = \ln \rho + \ln l - \ln S$

derivando: $\frac{1}{R} \frac{dR}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{l} \frac{dl}{dt} - \frac{1}{S} \frac{dS}{dt}$ passando alle differenze finite con i Δ al posto dei d

$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta l}{l} - \frac{\Delta S}{S}$ e potendo considerare i Δt tutti eguali, si semplificano

essendo: $S = \pi \frac{D^2}{4}$ $\frac{dS}{dt} = \frac{\pi}{4} 2D \cdot \frac{dD}{dt} \rightarrow \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\pi}{2} D \cdot \frac{\Delta D}{\Delta t} \rightarrow \Delta S = \frac{\pi}{2} D \cdot \Delta D$

$\frac{\Delta S}{S} = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot D \cdot \Delta D}{\frac{\pi}{4} \cdot D^2} = 2 \frac{\Delta D}{D} = 2 \cdot \varepsilon_t$

rimane: $\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta l}{l} - 2 \frac{\Delta D}{D} = \frac{\Delta \rho}{\rho} + \varepsilon_a - 2\varepsilon_t = \frac{\Delta \rho}{\rho} + \varepsilon_a + 2 \cdot \nu \varepsilon_a$

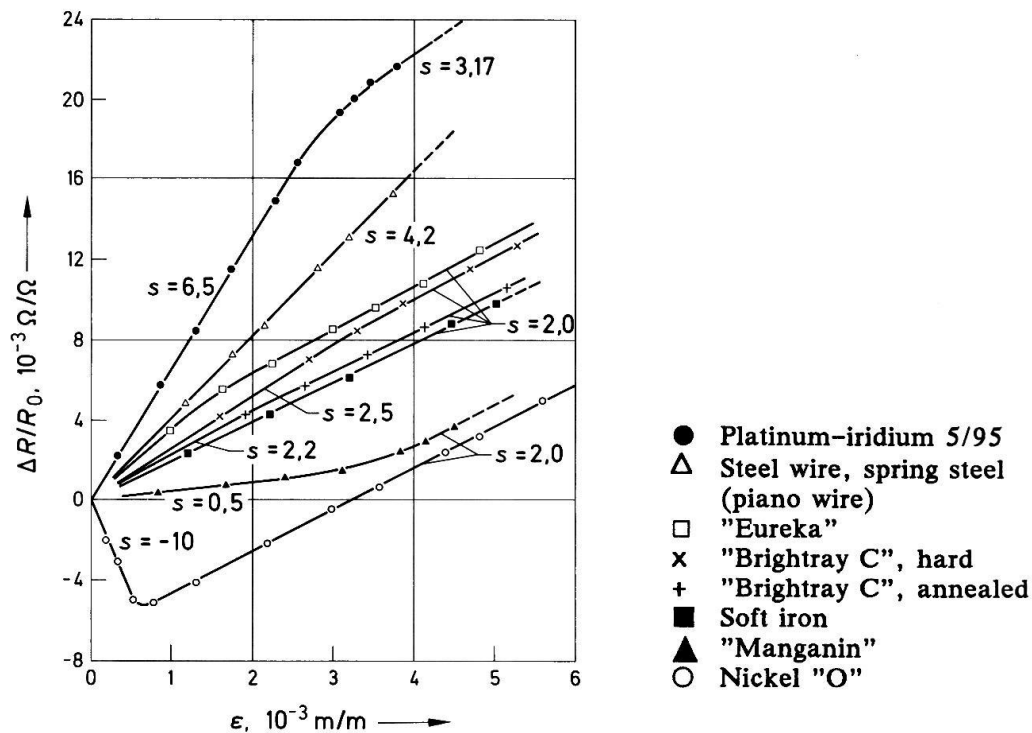
ricordando che il segno di ε_t è *discorde* con quello di ε_a .

Esprimendo la **sensibilità** come rapporto della variazione relativa tra uscita ed ingresso del trasduttore:

$$F = \frac{\frac{\Delta R}{R}}{\frac{\Delta l}{l}} = \frac{\frac{\Delta \rho}{\rho}}{\frac{\Delta l}{l}} + 1 + 2\nu$$

Immaginando per un attimo di avere una *variazione della resistività $\Delta \rho$ nulla* in funzione della deformazione e considerando un *coefficiente di Poisson* nominale di $\nu \cong 0.3$ si otterrebbe dal calcolo una sensibilità $F \cong 1.5 \div 1.7$. Purtroppo la variazione $\Delta \rho / \rho$ non è nulla ed è anche incognita ! I costruttori di estensimetri procedono quindi attraverso operazioni di taratura, sia deformando fili liberi, sia deformando un certo numero di trasduttori finiti, estratti dal lotto di produzione. I valori

della sensibilità che si ottengono dalla taratura di estensimetri per acciaio e per alluminio sono quasi sempre di $F \cong 2$. Non solo il contributo di $\Delta\rho/\rho$ aumenta la sensibilità del trasduttore, ma fortunatamente, come evidenziato sotto nella figura 13.8, risulta anche essere costante per molti materiali fino a deformazioni del 5–6 % quindi, il fatto di non conoscere la legge di variazione della resistività in funzione della deformazione $\rho = \rho(\varepsilon)$ non limita l'utilizzazione pratica degli estensimetri elettrici a resistenza.



Resistance/strain characteristics for freely tensioned wires

Figura 13.8

In definitiva, è possibile esprimere la *curva di graduazione degli estensimetri elettrici a resistenza*

con la semplice relazione: $\frac{\Delta R}{R} = F \cdot \varepsilon$ dove il fattore F prende il nome di **fattore di taratura**,

proprio per il modo con il quale viene ricavato il suo valore, mediante taratura, appunto. Nella pratica il valore di F è sempre fornito dal costruttore. Esso rappresenta anche *l'amplificazione intrinseca* del trasduttore. Per ottenere fattori F sensibilmente maggiori di 2 si deve ricorrere a trasduttori con un principio di funzionamento differente: gli **estensimetri piezoresistivi a semiconduttore**. Per questi trasduttori è possibile esprimere la variazione di resistività direttamente

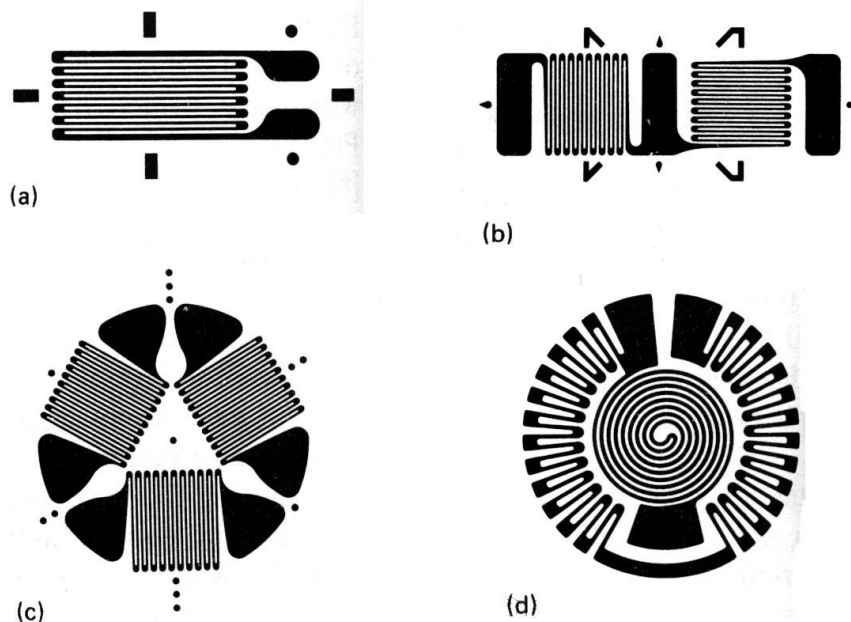
in funzione dello stato di sollecitazione $\frac{\Delta\rho}{\rho} = \pi_{ij} \cdot \sigma$ attraverso la matrice π delle costanti

piezoresistive. Ciò non di meno, gli estensimetri piezoelettrici sono poco utilizzati a causa della loro *non linearità* e di una certa delicatezza intrinseca che ne limita l'utilizzo in ambito industriale.

Gli estensimetri elettrici a resistenza sono oggi prodotti a "lotti" con *tecniche di fotoincisione* mediante raggi laser, per asportazione di materiale conduttore "dal foglio pieno". Ne consegue che i



fili non hanno più sezione circolare ma risultano “appiattiti” sul supporto isolante. Queste tecniche di produzione avanzate consentono di ottenere da un'unica matrice decine di trasduttori e con le forme più varie. In tal modo sono stati resi disponibili agli utenti estensimetri *multigriglia*, capaci di misurare la deformazione lungo più direzioni, come illustrato sotto nella figura 13.9.



Nei casi in figura è possibile misurare deformazioni :

(a) trazione & compress.

(b) XY con assi a 90°

(c) *rosetta* con assi 120°

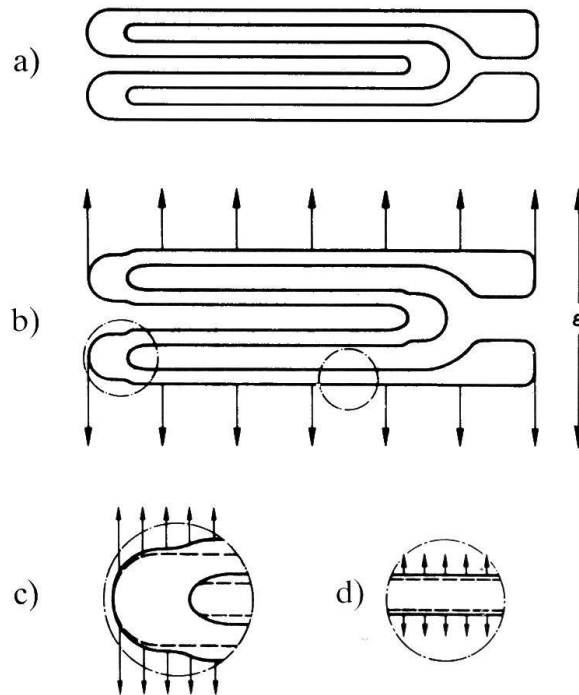
(d) radiale e circonferen.

Figura 13.9

Si tenga anche presente che gli estensimetri sono *trasduttori monouso*, ovvero una volta incollati sul pezzo non possono più essere staccati per essere riutilizzati.

Per quanto riguarda le procedure di incollaggio degli estensimetri, esse rappresentano una fase non secondaria nel procedimento di misura estensimetrico, sono quindi rigidamente prescritte dai costruttori. I collanti per estensimetri sono studiati per trasferire al meglio la deformazione dal pezzo al trasduttore e risultano quindi piuttosto elastici; essi non devono irrigidire l'interfaccia tra il materiale e l'estensimetro ovvero non devono introdurre errore d'inserzione locale, quindi è anche importante che lo strato di collante sia quanto più sottile possibile. Si tenga presente che taluni errori nella fase di applicazione, quali un errato posizionamento, il danneggiamento dell'isolamento elettrico tra la griglia e il pezzo, o l'inclusione accidentale tra la basetta del trasduttore ed il pezzo di micro-bolle d'aria, possono dar luogo ad inconvenienti che inficiano completamente l'accuratezza della misura di deformazione.

Gli estensimetri a griglia fotoincisa non sono infine esenti da errori dovuti alla *sensibilità trasversale*, ovvero risentono in qualche misura di una eventuale deformazione che agisce sul pezzo in direzione trasversale alla direzione della griglia. Il problema è illustrato sotto nella figura 13.10 e non sempre può essere ritenuto trascurabile.

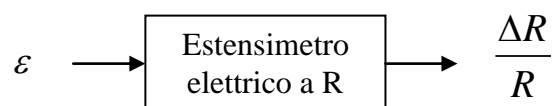


The causes of transverse sensitivity in strain gages

- a) initial condition
- b) under transverse strain
- c) deformation in the region of the transverse connections
- d) deformation in the other regions of the measuring grid

Figura 13.10

E' dunque possibile schematizzare un trasduttore estensimetrico elettrico a resistenza con il blocco:



Purtroppo, quando si eseguono misure con gli estensimetri, in uscita dal trasduttore non si ottiene solamente la variazione di resistenza dovuta alla deformazione meccanica del pezzo, indicata dalla curva di graduazione $\frac{\Delta R}{R} = F \cdot \varepsilon$. Gli estensimetri elettrici sono trasduttori passivi, per funzionare

hanno bisogno di essere alimentati. La corrente che scorre nella griglia, per effetto Joule, provoca un riscaldamento del filo e ne innalza la temperatura di un ΔT . Ciò significa che, insieme alla variazione di resistenza dovuta alla deformazione meccanica del pezzo, si ha in uscita dal trasduttore un *contributo termico* aggiuntivo $\frac{\Delta R'}{R} = \alpha \cdot \Delta T$, dove con α si è indicato il *coefficiente termico di resistenza* del materiale che costituisce il filo dell'estensimetro.

Quando si effettuano misure a temperatura ambiente, la corrente di alimentazione dell'estensimetro è la principale responsabile del riscaldamento, ma quando le misure vengono effettuate in condizioni ambientali severe, con temperature locali assai diverse da quella standard (25°C), l'estensimetro può variare la propria temperatura assorbendo calore dall'esterno. Qualunque sia la causa di variazione della temperatura della griglia, essa produce il contributo termico aggiuntivo riportato sopra. Come se



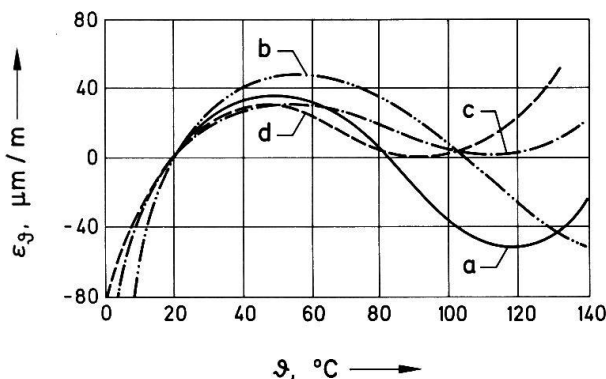
non bastasse, il riscaldamento della griglia provoca un *allungamento termico* del filo $\frac{\Delta l'}{l} = \beta' \cdot \Delta T$. Essendo l'estensimetro in intimo contatto con il pezzo, il riscaldamento ΔT provoca (localmente) anche un allungamento del materiale sottostante l'estensimetro $\frac{\Delta l''}{l} = \beta'' \cdot \Delta T$, che non sarà generalmente eguale a quello della griglia. Ne risulta un allungamento differenziale tra la griglia dell'estensimetro e il materiale del pezzo sottostante $\frac{\Delta l}{l} = (\beta' - \beta'') \cdot \Delta T$ che produce in uscita un secondo contributo termico $\frac{\Delta R''}{R} = F \cdot \frac{\Delta l}{l} = F \cdot (\beta' - \beta'') \cdot \Delta T$. In definitiva, si ottiene in uscita:

- 1) $\frac{\Delta R}{R} = F \cdot \varepsilon$ dovuta alla sollecitazione meccanica !
- 2) $\frac{\Delta R_T}{R} = [\alpha + F(\beta' - \beta'')] \cdot \Delta T$ dovuta solamente agli effetti termici !

il contributo (2) può ingannare l'utente perché appare in uscita dal trasduttore come una vera e propria deformazione fittizia. Per questo motivo, essa prende il nome di **deformazione apparente**:

$$\varepsilon_{app} = \frac{1}{F} \frac{\Delta R_T}{R} = \left[\frac{\alpha}{F} + (\beta' - \beta'') \right] \cdot \Delta T$$

Poiché i coefficienti α e β' dipendono dal materiale del filo della griglia mentre β'' dipende dal materiale del pezzo sottostante, è possibile minimizzare il contributo termico se si riesce a realizzare $\alpha + F(\beta' - \beta'') = 0$ ovvero $\frac{\alpha}{F} = \beta'' - \beta'$. Gli estensimetri che riescono ad approssimare tale relazione si dicono **autocompensati in temperatura**. Si osservi che l'autocompensazione dipende dal valore β'' del materiale sottostante l'estensimetro e si realizza solamente se l'estensimetro è incollato sul materiale appropriato (acciaio o alluminio). In altre parole, gli estensimetri sono autocompensati in temperatura *per un solo materiale*, indicato dal costruttore. Si tenga presente infine che l'autocompensazione in temperatura non è mai perfetta e dipende anzi dalla temperatura di lavoro degli estensimetri, come illustrato sotto nella figura 13.11.



material	α_c
a titanium Ti6Al4V	$8.5 \cdot 10^{-6}/K$
b ferritic steel	$12 \cdot 10^{-6}/K$
c austenitic steel	$16 \cdot 10^{-6}/K$
d aluminum AlCuMg2	$23 \cdot 10^{-6}/K$

Residual temperature responses of temperature compensated strain gages with optimum matching to the thermal expansion coefficients of various component materials in the temperature range 10 to 130° C.

Figura 13.11



Si consideri ora l'esempio numerico seguente:

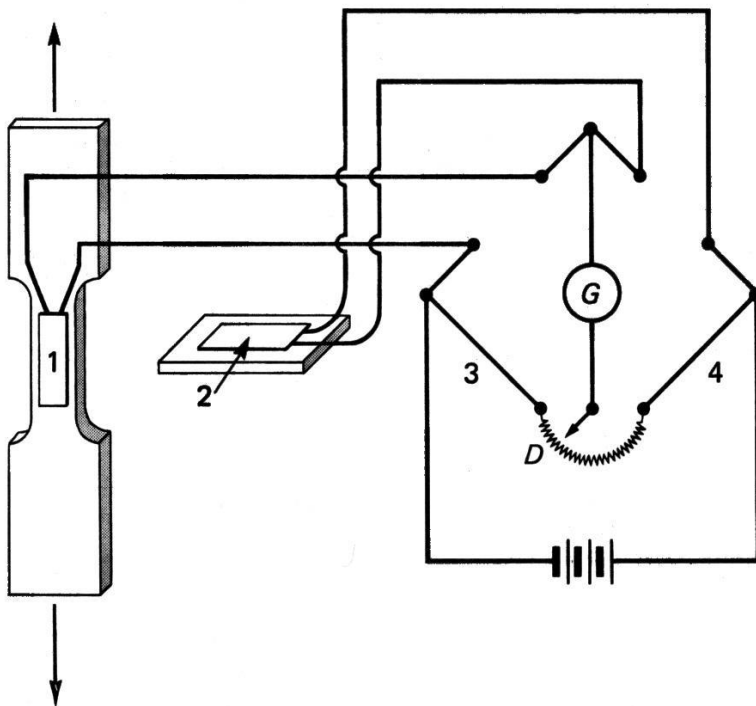
Se $\varepsilon = \frac{1}{F} \frac{\Delta R}{R}$, a quanto ammonta la variazione della resistenza $\Delta R = \varepsilon \cdot F \cdot R$ da rilevare se si sta misurando una deformazione di $100\mu\text{m/m}$ con un estensimetro da 120Ω ?

$$\Delta R = 100 \cdot 10^{-6} \times 2 \times 120\Omega = 0.024\Omega = 24\text{m}\Omega$$

con una variazione della resistenza di solo lo 0.02 % conviene utilizzare un *metodo di zero*.

Tale metodo è disponibile e si mette in pratica collegando gli estensimetri al **ponte di Wheatstone**. I benefici derivanti dal collegamento al ponte di Wheatstone verranno illustrati attraverso lo studio della misura delle sollecitazioni semplici.

Per la misura della **deformazione di trazione** si può fare riferimento al collegamento riportato nella figura 13.12, dove le resistenze di completamento del ponte (3) e (4) sono state inglobate nel potenziometro di azzeramento D.



Si immagini di effettuare la misura della deformazione di trazione del provino a temperatura standard (25°C), mediante un solo estensimetro (1), incollato con la griglia disposta longitudinalmente con l'asse del provino.

Valgono contemporaneamente le relazioni:

$$\frac{\Delta e}{E} = \frac{1}{4} \frac{\Delta R}{R} \quad \varepsilon = \frac{1}{F} \frac{\Delta R}{R}$$

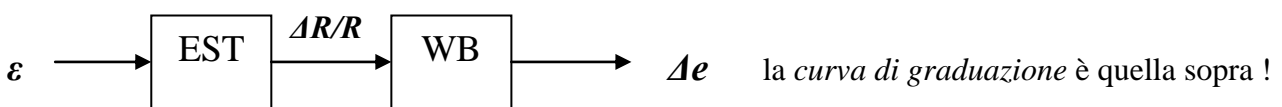
che combinate tra loro danno:

$$\frac{\Delta e}{E} = \frac{1}{4} \cdot F \varepsilon$$

$$\Delta e = \frac{1}{4} E F \cdot \varepsilon$$

Figura 13.12

In definitiva, abbiamo collegato il trasduttore ad un circuito di manipolazione del segnale, per cui si può schematizzare la nuova catena come segue:



L'estensimetro (2) non subisce alcuna deformazione in quanto è incollato su un pezzo dello stesso materiale del provino, posto di fianco, e non è sollecitato meccanicamente. Esso subisce però le medesime vicissitudini termiche di (1). I contributi termici (ε_{app}) dei due estensimetri sono eguali.



Vale infatti $\frac{\Delta R_{T1}}{R} = \frac{\Delta R_{T2}}{R} = [\alpha + F(\beta' - \beta'')] \cdot \Delta T$ ma se i trasduttori vengono collegati come in figura

13.12 su rami contigui del ponte di Wheatstone, i $\frac{\Delta R_T}{R}$ si elidono: $\frac{\Delta e_T}{E} = \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta R_{T1}}{R} - \frac{\Delta R_{T2}}{R} \right) = 0$

Un collegamento appropriato degli estensimetri al ponte di Wheatstone consente quindi di *eliminare intrinsecamente* gli indesiderati effetti termici.

Se, ai fini della misura di deformazione, si vuole rendere utile anche l'estensimetro (2) si potrebbe incollare il trasduttore sul pezzo soggetto a deformazione con la griglia rivolta trasversalmente all'asse di deformazione, come indicato nella figura 13.13 di sotto. Ferma restando l'eliminazione intrinseca dei contributi termici, una tale configurazione comporta che l'estensimetro (2) misura la deformazione di contrazione trasversale del provino $\varepsilon_t = -\nu \cdot \varepsilon_a$ dove con ν si è indicato il *coefficiente di Poisson*.

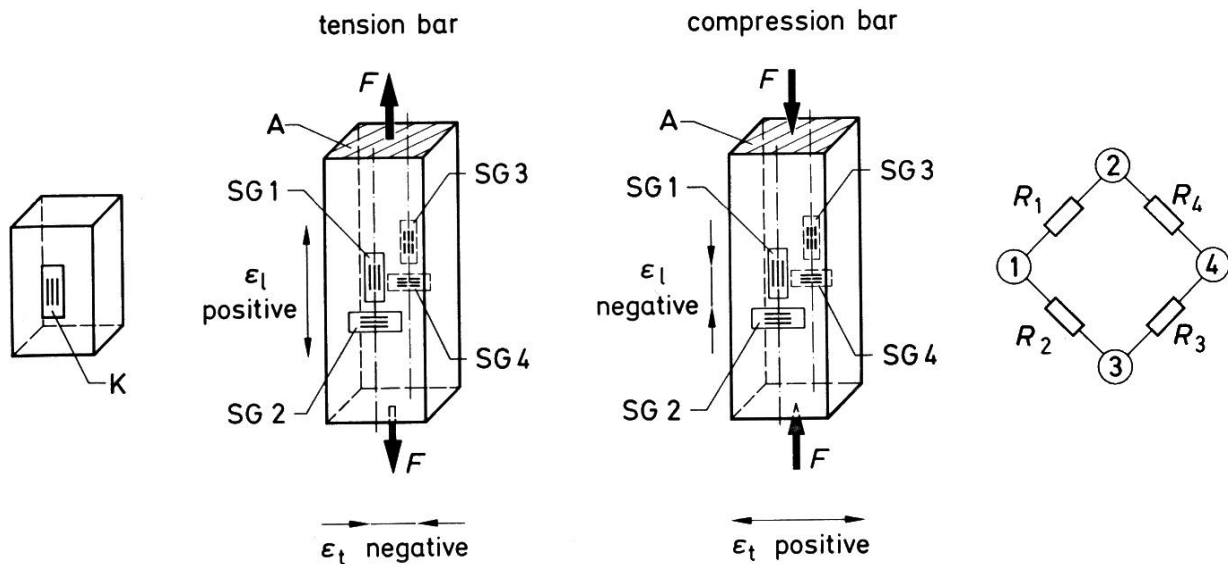


Figura 13.13

in questo modo la curva di graduazione dell'insieme *estensimetri + ponte WB* diviene:

$$\frac{\Delta e}{E} = \frac{F}{4} (\varepsilon_a - \varepsilon_t) = \frac{F}{4} (\varepsilon_a - (-\nu \varepsilon_a)) = \frac{F}{4} \varepsilon_a (1 + \nu)$$

il fattore tra parentesi $(1 + \nu)$ prende il nome di **fattore di ponte** e rappresenta una amplificazione aggiuntiva che si ottiene solo in virtù della disposizione opportuna dell'estensimetro (2) sul pezzo e del collegamento dei due trasduttori al ponte di Wheatstone su rami contigui.

Volendo raddoppiare ulteriormente il fattore di ponte, sarebbe possibile applicare sul provino altri due estensimetri in modo speculare ai primi due, come indicato sopra nella figura 13.13. Tale disposizione "completarebbe il ponte" con tutti e quattro i rami attivi e consente di ottenere un *fattore di ponte massimo* $2(1 + \nu) \cong 2.6$. Le ε_{app} dovute ai contributi termici sono ancora una volta eliminate dalla proprietà dei segni alternati del ponte. Una tabella con tutte le possibili configurazioni di estensimetri per la misura della trazione è riportata a titolo di esempio qui sotto.



Bridge arm	R_1	R_2	R_3	R_4	Result	Notes
Bridge equation	$\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 = \epsilon_i$					1
Simple quarter bridge	SG1	R_C	R_C	R_C	$\epsilon_i = \epsilon_1$	2
Quarter bridge with comp. strain gage	SG1	K	R_C	R_C	$\epsilon_i = \epsilon_1$	3
Half bridge	SG1	SG2	R_C	R_C	$\epsilon_i = \epsilon_1 + \epsilon_q = (1+\nu) \cdot \epsilon_1$	4
Diagonal bridge	SG1	R_C	SG3	R_C	$\epsilon_i = 2 \cdot \epsilon_1$	5
Diagonal bridge with 2 comp. strain gages	SG1	K	SG3	K	$\epsilon_i = 2 \cdot \epsilon_1$	6
Full bridge	SG1	SG2	SG3	SG4	$\epsilon_i = 2(\epsilon_1 + \epsilon_q) = 2(1+\nu)\epsilon_1$	7

Circuits that could be used for the tension/compression bar with their results

Per la misura delle *deformazioni di flessione*, è possibile fare riferimento alla configurazione riportata sotto nella figura 13.14. Il ponte di Wheatstone è il medesimo del caso precedente.

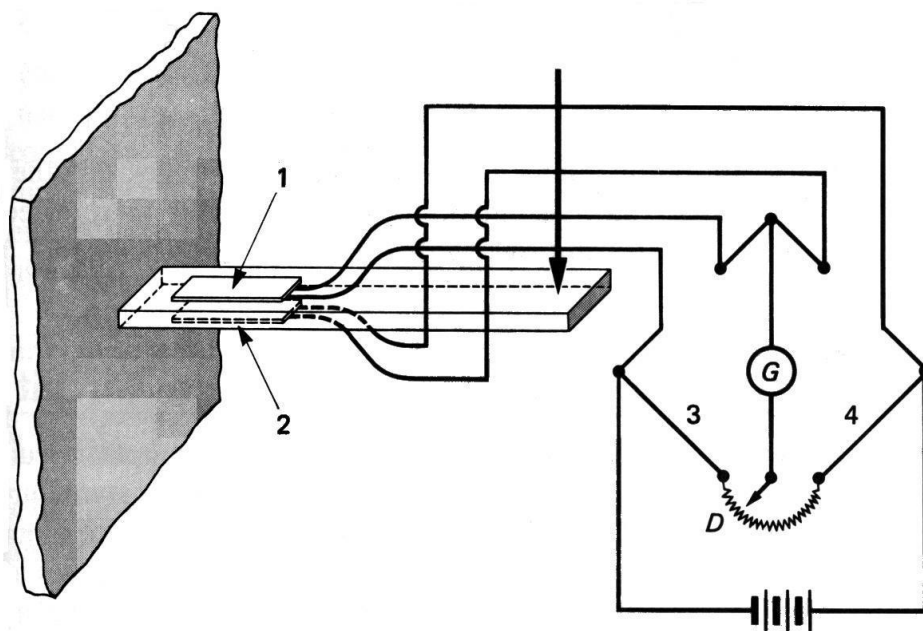


Figura 13.14

come si vede, per eliminare i contributi termici ed aumentare il fattore di ponte, l'estensimetro (2) viene collegato sulla faccia inferiore della lamina sottoposta a flessione. In questo modo si ottiene che l'estensimetro (1) applicato sulle *fibre tese*, rileva deformazioni di trazione, mentre l'estensimetro (2) applicato sulle *fibre compresse*, rileva deformazioni di compressione, di intensità

eguale a (1) ma di segno opposto. Per la curva di graduazione del dispositivo “estensimetri + ponte di Wheatstone” si ottiene in questo caso $\frac{\Delta e}{E} = \frac{1}{4} F(\varepsilon_{f1} - \varepsilon_{f2})$.

Ma essendo $\varepsilon_{f2} = -\varepsilon_{f1}$ si ottiene subito $\frac{\Delta e}{E} = \frac{F}{4}(\varepsilon_{f1} - (-\varepsilon_{f1})) = \frac{F}{4} \cdot 2\varepsilon_f = \frac{F}{2} \varepsilon_f$ con *fattore di ponte* eguale a 2. E' possibile aumentare il fattore di ponte a 4 completando il ponte con altri due estensimetri, collegati a fianco dei primi due come mostrato sotto nella figura 13.15.

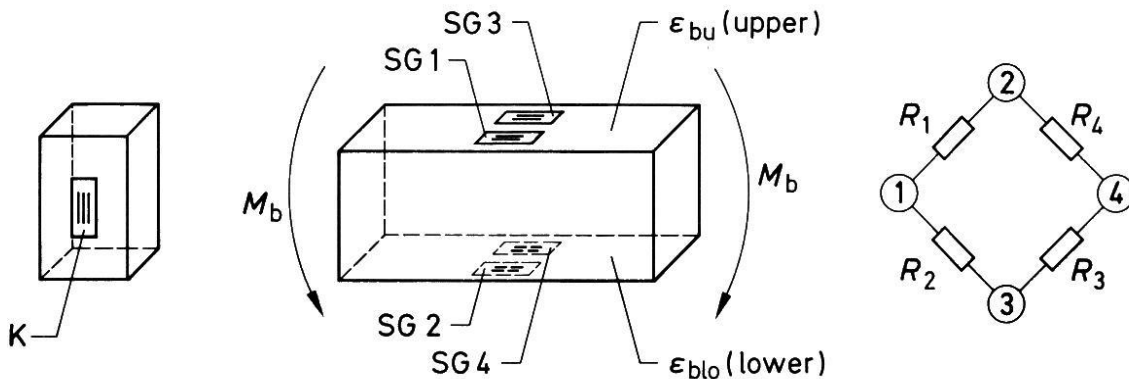


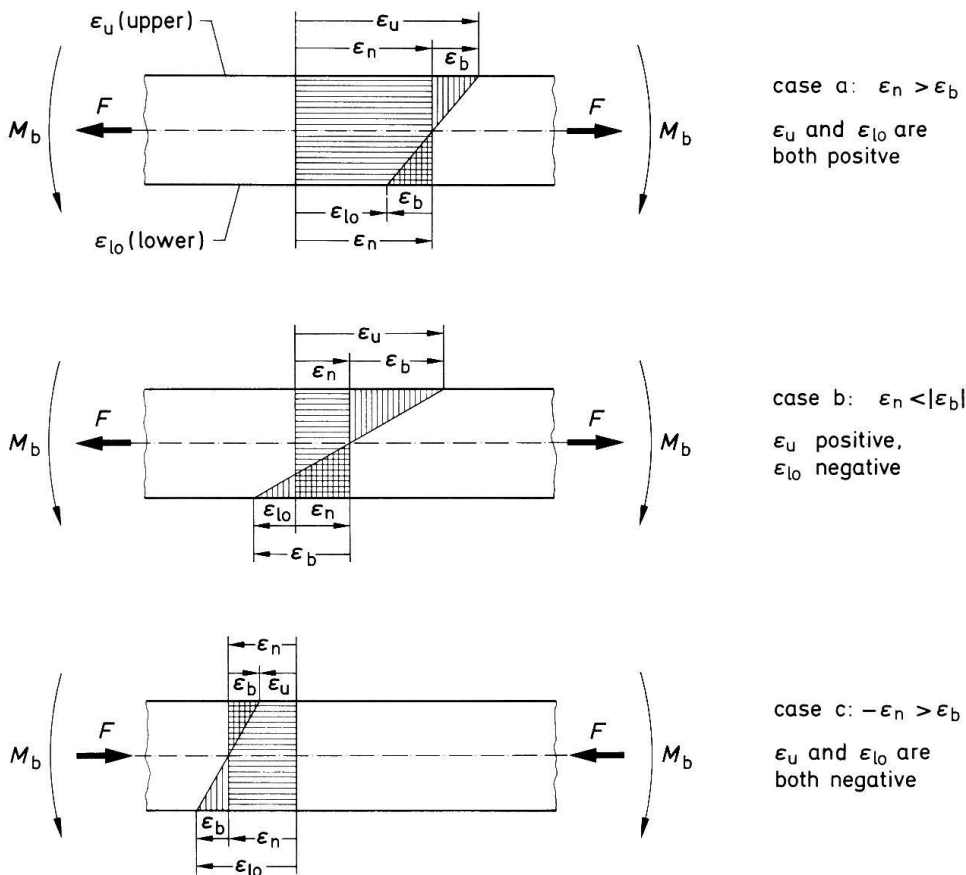
Figura 13.15

Una tabella con tutte le possibili combinazioni di collegamento degli estensimetri per la misura della deformazione di flessione è riportata qui di seguito

Bridge arm	R_1	R_2	R_3	R_4	Result	Notes
Bridge equation	$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4 = \varepsilon_i$					1
Simple quarter bridge	SG1	R_C	R_C	R_C	$\varepsilon_i = \varepsilon_{bu}$	2
	SG2	R_C	R_C	R_C	$\varepsilon_i = \varepsilon_{blo}$	
Quarter bridge with comp. strain gage	SG1	K	R_C	R_C	$\varepsilon_i = \varepsilon_{bu}$	3
	SG2	K	R_C	R_C	$\varepsilon_i = \varepsilon_{blo}$	
Half bridge	SG1	SG2	R_C	R_C	$\varepsilon_i = 2 \varepsilon_b$	4
Diagonal bridge	SG1	R_C	SG3	R_C	$\varepsilon_i = 2 \varepsilon_{bu}$	5
	SG2	R_C	SG4	R_C	$\varepsilon_i = 2 \varepsilon_{blo}$	
Diagonal bridge with 2 comp. strain gages	SG1	K	SG3	K	$\varepsilon_i = 2 \varepsilon_{bu}$	6
	SG2	K	SG4	K	$\varepsilon_i = 2 \varepsilon_{blo}$	
Full bridge	SG1	SG2	SG3	SG4	$\varepsilon_i = 4 \varepsilon_b$	7

Circuits which can be used on the bending beam with a mirror-imaged cross-section

E' anche possibile tarare lo strumento terminale direttamente in unità di misura del momento flettente M_f .

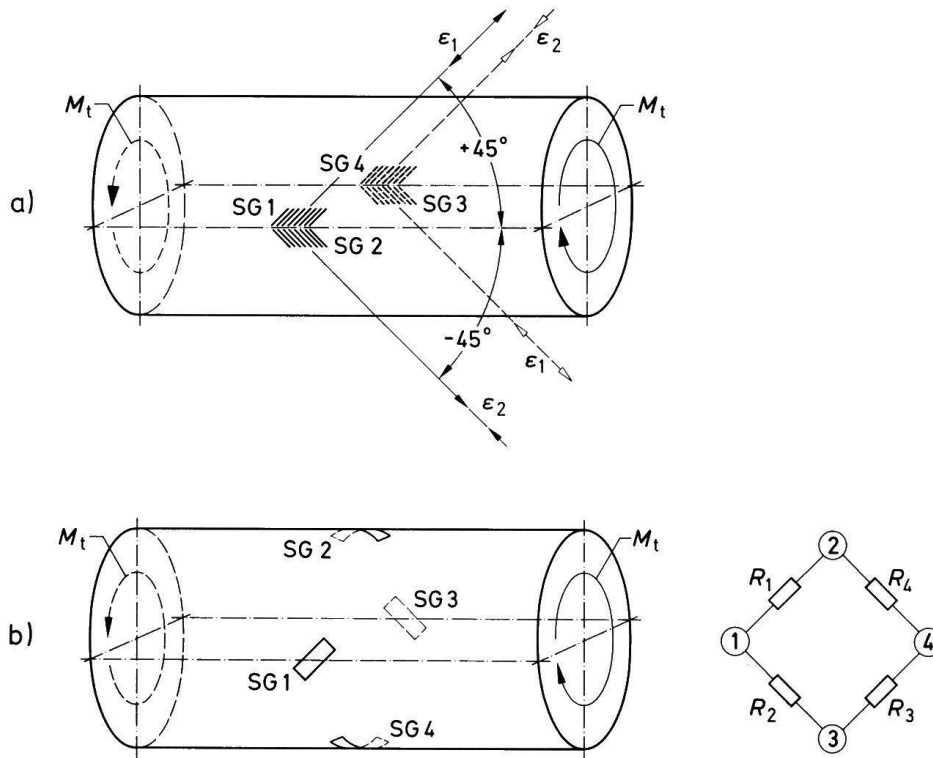


Si noti che nelle applicazioni reali, gli stati tensionali e le deformazioni che ne conseguono non si presentano quasi mai in forma semplice, separati uno dall'altro ma esistono tutti contemporaneamente in sovrapposizione sul pezzo in esame. Di ciò si deve tenere conto quando si analizza il segnale proveniente da un ponte estensimetrico, come riassunto nel caso della *trazione + flessione* della figura 13.16 di lato.

Figura 13.16

Un esempio importante di stato tensionale biassiale è rappresentato dalla misura della **deformazione di torsione** sulla superficie di un albero cilindrico. Questo caso riveste una grande importanza applicativa nell'ingegneria meccanica perché, nella quasi totalità dei casi, i motori termici ed elettrici rendono disponibile la potenza meccanica attraverso un albero motore rotante alla velocità angolare ω e sottoposto ad una coppia meccanica C : $W_{mecc} = C \times \omega$.

Le direzioni principali della tensione sulla superficie cilindrica esterna dell'albero si trovano lungo le *eliche inclinate di 45° rispetto all'asse dell'albero*. Lungo queste direzioni vanno collocati, come indicato nella figura 13.17, gli estensimetri a mezzo ponte o a ponte intero. Per le deformazioni rilevate dai singoli trasduttori vale la relazione: $\epsilon_1 = \epsilon_3 = -\epsilon_2 = -\epsilon_4$. Il ponte di Wheatstone viene configurato completamente "a bordo" dell'albero e, nel caso frequente dell'albero sottoposto a torsione mentre trasferisce una potenza meccanica ($W = C \cdot \omega$) mediante la rotazione ω , occorre prevedere un metodo per inviare all'albero rotante la corrente di alimentazione del ponte e prelevare dall'albero rotante il segnale elettrico di squilibrio del ponte Δe . Il più delle volte è sufficiente un sistema a *contatti striscianti*.



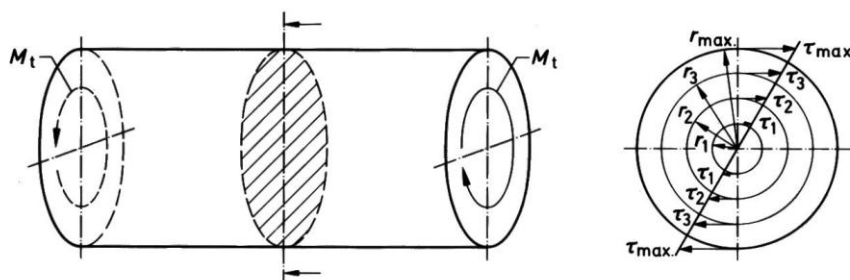
Torsion shaft with strain gages mounted in the principal strain directions ϵ_1 and ϵ_2 and their positions in the bridge circuit
 a) with the application of special X rosettes
 b) with the application of single strain gages

Figura 13.17

La configurazione a ponte intero sull'albero è preferita, sia per minimizzare l'influenza delle resistenze dei contatti striscianti che inviano il segnale fuori dall'albero rotante, sia per motivi di compensazione delle possibili deformazioni assiali o di flessione che potrebbero esistere sull'albero.

La curva di graduazione è $\frac{\Delta e}{E} = \frac{F}{4}(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4) = \frac{F}{4} \cdot 4\epsilon_{45^\circ}$ con *fattore di ponte* 4.

Dentro la sezione dell'albero sottoposto a torsione, la tensione di taglio aumenta procedendo lungo il raggio, dal centro verso la periferia, e raggiunge il valore massimo $\tau_{\max} = 2\epsilon_{45^\circ} \cdot G$ proprio sulla



Distribution of the torsion stress over the cross-section of a twisted shaft

superficie esterna, come indicato sotto in figura 13.18. Con G si è indicato il modulo di elasticità tangenziale del materiale mentre ϵ_{45° è la deformazione rilevata da ciascun estensimetro lungo le eliche di massima tensione.

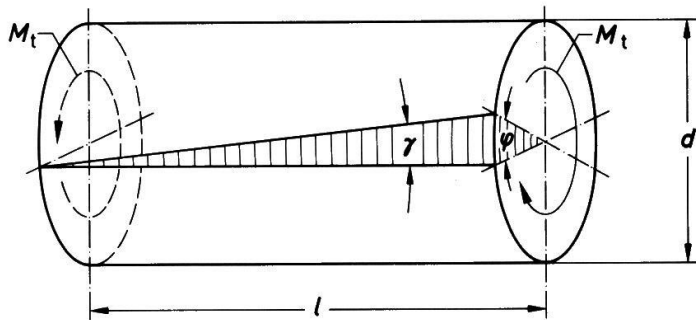
Figura 13.18



Il momento torcente M_t sulla superficie può essere calcolato come:
$$M_t = \frac{2\tau_{\max} \cdot J_p}{d} = \frac{4\varepsilon_{45^\circ} \cdot G \cdot J_p}{d}$$

dove J_p è il *momento d'inerzia polare* della sezione dell'albero.

Anche l'angolo γ della deformazione di scorrimento tangenziale sulla superficie dell'albero e la rotazione relativa φ di due sezioni dell'albero alla distanza l possono essere calcolati a partire dalla misura della deformazione di torsione.



Shear deformation angle γ and angle of twist φ

Per l'angolo di scorrimento γ vale la semplice relazione:

$$\gamma = \frac{\tau_{\max}}{G} = 2\varepsilon_{45^\circ} \cdot J_p$$

mentre per l'angolo di rotazione relativa φ delle sezioni si ha:

$$\varphi = 2 \frac{l}{d} \cdot \gamma = 4\varepsilon_{45^\circ} \cdot \frac{l}{d} \cdot J_p$$

Figura 13.19

Esistono in commercio molte centraline per le misure estensimetriche, quasi tutte sono equipaggiate con ponti di Wheatstone. Ciascun ponte può accomodare da uno a quattro estensimetri, a seconda delle circostanze e delle necessità. In gergo, un singolo ponte viene chiamato **canale estensimetrico**.

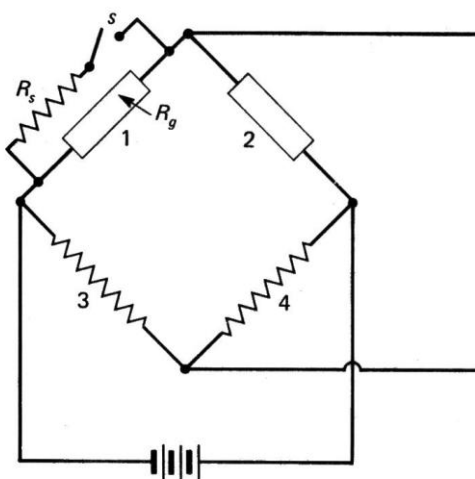


Figura 13.20

Ogni *canale estensimetrico* deve avere la possibilità di essere bilanciato, per mezzo di reostati interni, e di essere calibrato per mezzo di *resistenze di shunt*, le quali "simulano elettricamente" una deformazione nota sul ramo del ponte. La $\varepsilon_{elettrica}$ si ottiene, come mostrato a lato in figura 13.20, connettendo "temporaneamente" in parallelo al ramo del ponte R_g una resistenza R_s nota, che produrrà quindi su quel ramo una variazione :

$$\frac{\Delta R}{R_g} = F \cdot \varepsilon_{elettrica} \quad \text{dove} \quad \Delta R = R_g - \frac{R_g R_s}{R_g + R_s}$$

Questa variazione ΔR viene rilevata in uscita dal ponte :

$$\frac{\Delta e}{E} = \frac{1}{4} \frac{\Delta R}{R_g} = \frac{1}{4} (F \cdot \varepsilon_{elettrica})$$

e consente di mettere a rapporto il valore dell'uscita elettrica Δe con quello della deformazione ε .

Uno schema di principio per un tipico *canale estensimetrico* è riportato a titolo d'esempio nella figura 13.21, mentre uno schema elettrico completo di regolatore dell'alimentazione del ponte, di reostati di bilanciamento, di resistenze di "shunt" per la calibrazione e di amplificatore a transistor è riportato sotto nella figura 13.22.

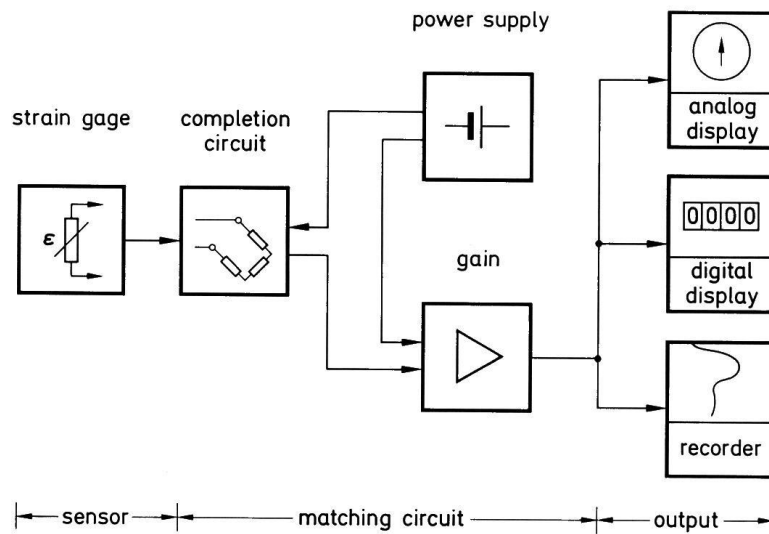


Figura 13.21

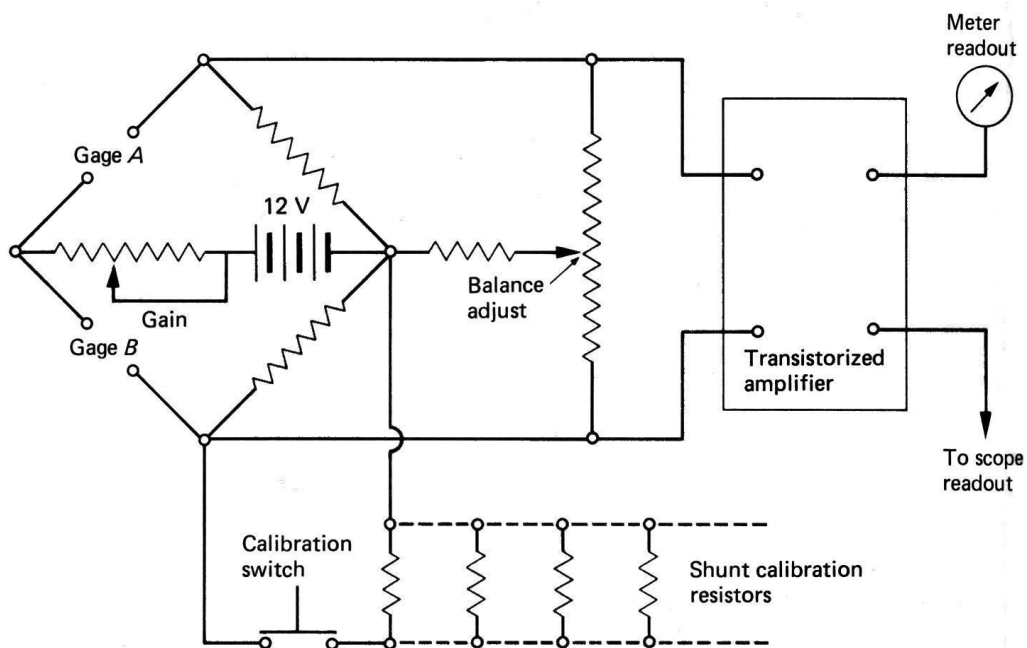


Figura 13.22

Note:

Figure 13.6 courtesy of:
Branca F.P. – *Misure Meccaniche* – ed. ESA

Figure 13.2, 13.3, 13.4, 13.5, 13.8, 13.10, 13.11, 13.13, 13.15, 13.16, 13.17, 13.18, 13.19, 13.21 courtesy of:
Doebelin E.O. – *Measurement systems, application and design* – McGraw Hill

Figure 13.1, 13.7, 13.9, 13.12, 13.14, 13.20, 13.22 courtesy of:
Bechwith, Marangoni, Lienhard – *Mechanical Measurements* – Addison & Wesley